S2 B3 Correction APEF

Exercice 1 : polynômes

Les deux questions sont indépendantes.

1. *Soit* $A(X) = X^4 + 2X^2 + 8X + 5$.

   (a) *Montrer que* -1 *est une racine de* A. *Trouver* $\alpha \in \mathbb{N}$ *tel que* $(X+1)^\alpha$ *divise* A *et* $(X+1)^{\alpha+1}$ *ne divise pas* A.

   • $A(-1) = 1 + 2 - 8 + 5 = 0$ donc -1 est une racine de A.

   • $A'(X) = 4X^3+4X+8$ et $A''(X) = 12X^2+4$. D'où, $A'(-1) = -4-4+8 = 0$ et $A''(-1) = 12+4 = 16 \neq 0$.

   Ainsi, -1 est une racine d'ordre exactement 2 de A ce qui signifie que $(X+1)^2 \mid A$ et $(X+1)^3$ ne divise pas A.

   (b) *Après avoir effectué la division euclidienne de* A *par* $(X+1)^\alpha$, *écrire* A *comme produit de polynômes irréductibles d'une part dans* $\mathbb{R}[X]$, *d'autre part dans* $\mathbb{C}[X]$.

   On trouve $A(X) = (X+1)^2(X^2 - 2X + 5) + 0$ en posant la division euclidienne.

   Le discriminant de $X^2 - 2X + 5$ est égal à $-16 < 0$. Ce polynôme est donc irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Ainsi, dans $\mathbb{R}[X]$, $A(X) = (X+1)^2(X^2 - 2X + 5)$.

   Dans $\mathbb{C}[X]$, on a $A(X) = (X+1)^2(X - 1 - 2i)(X - 1 + 2i)$.

2. *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$, ***de degré*** 3 *vérifiant* $(X-1)^2 \mid (P(X)+1)$ *et* $X^2 \mid (P(X)-1)$.

   (a) *Que signifie les deux affirmations précédentes ? En déduire que* $P(1) = -1$ *et* $P(0) = 1$.

   De l'énoncé : $\exists\, (Q_1, Q_2) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $P(X) + 1 = (X-1)^2 Q_1(X)$ et $P(X) - 1 = X^2 Q_2(X)$.

   Ainsi, $P(1) + 1 = 0$ (en remplaçant X par 1 dans la première expression) et $P(0) - 1 = 0$ (X par 0 dans la seconde expression). Donc, $P(1) = -1$ et $P(0) = 1$.

   (b) *Expliquer pourquoi* $X \mid P'$ *et* $(X-1) \mid P'$. *En déduire que* $X(X-1) \mid P'$.

   1 est une racine d'ordre 2 de $P(X)+1$. Ainsi, 1 est aussi une racine de son polynôme dérivé qui est $P'(X)$. Donc $P'(1) = 0$, ce qui signifie que $(X-1) \mid P'$.

   De même, comme la dérivée de $P(X) - 1$ est $P'(X)$, 0 annule $P'(X)$. D'où, $X \mid P'$.

   0 et 1 étant deux racines distinctes de P', on a donc $X(X-1) \mid P'$.

   (c) *De ce qui précède, en déduire que* $P'(X) = aX^2 - aX$ *avec* $a \in \mathbb{R}$.

   De ce qui précède, on en déduit qu'il existe $Q_3 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P'(X) = X(X-1)Q_3(X)$.

   Or $\deg(P) = 3 \implies \deg(P') = 2 \implies \deg(Q_1) = 0$. Ainsi, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $Q_1(X) = a$. Donc $P'(X) = aX(X-1) = aX^2 - aX$.

   (d) *En déduire :* $\exists\, b \in \mathbb{R}$ *tel que* $P(X) = a\dfrac{X^3}{3} - a\dfrac{X^2}{2} + b$. *En utilisant la question 2.(a), trouver* a *et* b.

   De la question précédente, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = a\dfrac{X^3}{3} - a\dfrac{X^2}{2} + b$. Or $P(0) = 1$ d'où $b = 1$. De plus, $P(1) = -1$ d'où $\dfrac{a}{3} - \dfrac{a}{2} + 1 = -1$. Cela donne $a = 12$.

   En conclusion : $P(X) = \dfrac{12X^3}{3} - \dfrac{12X^2}{2} + 1 = 4X^3 - 6X^2 + 1$.

Exercice 2 : équations différentielles

Les questions sont indépendantes.

1. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle* (E) : $\frac{1}{2}y'' - y' + 5y = -\pi$.

   • L'équation caractéristique associée est (C) : $\frac{1}{2}r^2 - r + 5 = 0$. On a $\Delta = 1 - 10 = -9$. Ainsi, les racines de (C) sont : $r_1 = 1 + 3i$ et $r_2 = 1 - 3i$.

   • $y_p : x \longmapsto -\frac{\pi}{5}$ est une solution particulière évidente de (E).

   • En conclusion : $S = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x\left(k_1\cos(3x) + k_2\sin(3x)\right) - \frac{\pi}{5} \end{cases} ; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

2. *Résoudre, sur* $I =]-1, +\infty[$, (E) : $(x+1)y' - 2y = (x+1)^3\cos(3x)$.

   • Résolution de l'équation homogène : (E_0) : $(x+1)y' - 2y = 0$.

   On a $y_0(x) = ke^{-\int \frac{-2}{x+1}\,\mathrm{d}x} = ke^{2\ln(|x+1|)} = k(x+1)^2$ avec $k \in \mathbb{R}$.

   • On cherche une solution particulière de (E) de la forme $y_p : x \longmapsto k(x)(x+1)^2$ (variation de la constante).

   On a $y_p'(x) = k'(x)(x+1)^2 + 2k(x)(x+1)$. Ainsi, y_p est une solution de (E) ssi

   $(x+1)y_p'(x) - 2y_p(x) = (x+1)^3\cos(3x) \iff (x+1)^3k'(x) + 2k(x)(x+1)^2 - 2k(x)(x+1)^2 = (x+1)^3\cos(3x)$

   D'où, $k'(x) = \cos(3x)$. Prenons $k(x) = \frac{\sin(3x)}{3}$. On en déduit que $y_p(x) = (x+1)^2 \times \frac{\sin(3x)}{3}$.

   • En conclusion : $S = \left\{ y : \begin{cases}]-1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k(x+1)^2 + (x+1)^2 \times \frac{\sin(3x)}{3} \end{cases} ; k \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 3 : étude locale de fonctions

Les questions sont indépendantes.

1. *Soient* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *et* f *et* g *deux fonctions définies au voisinage de* x_0 *et ne s'y annulant pas. Donner* ***deux*** *définitions mathématiques de* ***chacune*** *des notations suivantes :* $f = o(g)$ *et* $f \sim g$ *au voisinage de* x_0.

   - $f \sim g \iff \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff$ au voisinage de x_0, $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$ avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

   - $f = o(g) \iff \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff$ au voisinage de x_0, $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

2. *La notation* $f(x) = o(g(x))$ *peut s'écrire aussi* $f(x) \ll g(x)$.

   Dans les cas suivants, compléter les pointillés par un des symboles $\ll$, $\gg$ *ou* $\sim$.

   Au voisinage de 0 : $\qquad 2x^2 \cdots\cdots x, \qquad (x^3 - 3x^2 + x) \cdots\cdots x \qquad$ et $\qquad (x^3 - 3x^2 + x) \cdots\cdots x^3$

   $$2x^2 \ll x, \qquad (x^3 - 3x^2 + x) \sim x \qquad \text{et} \qquad (x^3 - 3x^2 + x) \gg x^3$$

   Au voisinage de $+\infty$: $\qquad 2x^2 \cdots\cdots x, \qquad (x^3 - 3x^2 + x) \cdots\cdots x \qquad$ et $\qquad (x^3 - 3x^2 + x) \cdots\cdots x^3$

   $$2x^2 \gg x, \qquad (x^3 - 3x^2 + x) \gg x \qquad \text{et} \qquad (x^3 - 3x^2 + x) \sim x^3$$

3. Soient f et g deux fonctions telles qu'au voisinage de 0 :

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ et } g(x) = -1 + x + 3x^2 - x^3 + o(x^3)$$

(a) *Donner un équivalent (le plus simple possible !) en* 0 *de* $f(x)$. *Justifier brièvement en repartant de la définition.*

$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0 \iff \frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + x\varepsilon(x)$.

Ainsi, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Donc en 0, $f(x) \sim x$.

(b) *Donner un équivalent (autre que la fonction elle même) en* 0 *de :*

- $g(x) + 1$: ..... $g(x) + 1 \sim x$

- $h(x) = \sin(x) \times f(x) \times (g(x) + 1)$: ..... $h(x) \sim x \times x \times x$ donc $h(x) \sim x^3$.

(c) *A-t-on assez d'informations pour donner le développement limité en* 0 *de* $f(x)+g(x)$ *à l'ordre 1 ? À l'ordre 2 ? À l'ordre* 3 *? Donner le développement limité à l'ordre indiqué quand la réponse est oui.*

• Ordre 1. $f(x) + g(x) = x + o(x) - 1 + x + o(x) = -1 + 2x + o(x)$.

• Ordre 2. $f(x) + g(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 + x + 3x^2 + o(x^2) = -1 + 2x + \frac{5x^2}{2} + o(x^2)$.

• Ordre 3. On ne connait pas le DL à l'ordre 3 de f. On ne peut donc pas donné le DL à l'ordre 3 de $f(x) + g(x)$.

Exercice 4 : développements limités

Dans cet exercice, vous prendrez soin de rappeler les développements limités usuels que vous utiliserez.

1. *Donner le développement limité en* 0 *à l'ordre 3 de* $f(x) = \cos(x)e^{-2x}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \times \left(1 - 2x + \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3!} + o(x^3)\right) \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \times \left(1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right) \\ &= 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x^3 + o(x^3) \\ &= 1 - 2x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

2. (a) *Donner le développement limité en* 0 *à l'ordre* 4 *de* $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$g(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - 1\right)}{2}x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$$

(b) *Donner le développement limité en* 0 *à l'ordre* 4 *de* $h(x) = \ln(1 + g(x))$.

$$\begin{aligned}
h(x) &= \ln\left(2 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)\right) \\
&= \ln\left(2\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{3x^4}{16} + o(x^4)\right)\right) \\
&= \ln(2) + \ln\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{3x^4}{16} + o(x^4)\right) \\
&= \ln(2) - \frac{x^2}{4} + \frac{3x^4}{16} - \frac{x^4}{32} + o(x^4) \text{ en posant } u = -\frac{x^2}{4} + \frac{3x^4}{16} + o(x^4) \longrightarrow 0 \text{ et } u^2 = \frac{x^4}{16} + o(x^4) \\
&= \ln(2) - \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{32} + o(x^4)
\end{aligned}$$

Exercice 5 : calcul de limites

1. *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1 + x + \ln(1-x) + \cos(x)}{1 - (1-x)^\pi}$. ***Vous prendrez soin de votre rédaction.***

   • $N(x) = -1 + x + \ln(1-x) + \cos(x) = -1 + x - x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) + 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) = -x^2 + o(x^2)$.

   Ainsi, en 0, $N(x) \sim -x^2$.

   • $D(x) = 1 - (1-x)^\pi = 1 - (1 - \pi x + o(x)) = \pi x + o(x)$. Ainsi, en 0, $D(x) \sim \pi x$.

   • On en déduit que $\dfrac{N(x)}{D(x)} \sim \dfrac{-x^2}{\pi x} = -\dfrac{x}{\pi}$. Or $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{x}{\pi} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{N(x)}{D(x)} = 0$.

2. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^x$. ***Vous prendrez soin de votre rédaction.***

   $$\left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x = e^{x\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = e^{x\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = e^{1+o(1)}$$

   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^x = e^1$

   Autre façon de rédiger cette question :

   On pose $X = \dfrac{1}{x}$. Quand x tend vers $+\infty$, X tend vers 0. On est ramené à calculer : $\lim\limits_{X\to 0} (1 + \sin(X))^{\frac{1}{X}}$.

   $$(1 + \sin(X))^{\frac{1}{X}} = e^{\frac{1}{X}\times\ln(1+\sin(X))} = e^{\frac{1}{X}\ln(1+X+o(X))} = e^{\frac{1}{X}\times(X+o(X))} = e^{1+o(1)}.$$

   Donc, $\lim\limits_{X\to 0} (1 + \sin(X))^{\frac{1}{X}} = e^1$